

引用格式: 杨鹏, 寇冠元, 朱学康, 等. 浮体浅水波浪载荷数值计算方法研究[J]. 中国舰船研究, 2019, 14(1): 19-26.

Yang P, Kou G Y, Zhu X K, et al. Numerical calculation method for wave loads of floating structures in shallow water [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2019, 14(1): 19-26.

浮体浅水波浪载荷数值计算方法研究



扫码阅读全文

杨鹏^{1,2}, 寇冠元², 朱学康², 刘成义², 高长华²

1 海南大学 机电学院, 海南 海口 570228

2 武汉第二船舶设计研究所, 湖北 武汉 430205

摘要: [目的] 在浅水环境下, 对波浪中浮体的响应进行求解时, 其主要难点在于对有限水深格林函数及其偏导数的准确求解和快速计算。[方法] 为此, 利用改进的 Gauss-Laguerre 积分法, 提出一种可精确计算有限水深格林函数及其偏导数的方法, 结合循环矩阵原理, 给出对称性的处理方法和简化的级数求解公式。并将所提方法与其他商业软件计算结果进行对比分析。[结果] 结果表明, 所提计算方法精确度较高。[结论] 该方法可用于准确评估浅水中的浮体运动和波浪载荷。

关键词: 浮体; 浅水; 格林函数; 波浪载荷; 对称

中图分类号: U661.1

文献标志码: A

DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.01346

Numerical calculation method for wave loads of floating structures in shallow water

Yang Peng^{1,2}, Kou Guanyuan², Zhu Xuekang², Liu Chengyi², Gao Changhua²

1 School of Mechanics and Electrics Engineering, Hainan University, Haikou 570228, China

2 Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430205, China

Abstract: [Objectives] For figuring out the response of floating structures in the waves of shallow water, the main difficulty lies in the accurate solution and efficient calculation of Green's function and its partial derivative of the finite water depth. [Methods] Therefore, a method is proposed to accurately calculate the Green's function and its partial derivative by using the improved Gauss-Laguerre quadrature; then by combining this method with circulant matrix principle, one approach for dealing with symmetry problem and a simplified way of series for solving the formula are given. Finally, the numerical results of this method are compared with those of other commercial software. [Results] The analysis results show that the method proposed in this paper has high accuracy. [Conclusions] This proposed method can be used to accurately estimate motions and wave loads of the floating structures in shallow water.

Key words: floating structure; shallow water; Green's function; wave load; symmetry

0 引言

随着国家对南海开发和维护国家主权等需求的日益增强, 需要在南海岛礁附近布置大型浮式平台, 以供岛礁开发、综合执法补给和旅游等。岛礁附近的水深一般较浅, 位于浅水中浮体的水动

力运动和载荷响应与深水中的存在较大差别, 因此, 需要研究浅水中浮体在波浪中的运动和载荷响应。浅水中浮体与深水中浮体运动的最大差别和难点在于有限水深格林函数的准确求解。只有准确求解有限水深格林函数及其偏导数, 才能得到浮体在波浪中的响应。Li^[1]、谢永和等^[2]和刘日

收稿日期: 2018-07-06

网络首发时间: 2019-1-17 15:20

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973计划)资助项目(2013CB036105)

作者简介: 杨鹏(通信作者), 男, 1988年生, 博士, 高级工程师。研究方向: 船舶与潜艇总体设计。E-mail: pycssrc@qq.com

明等^[3]提出了数值积分方法,用来计算有限水深的格林函数及其导数。有限水深格林函数求解方法分为积分形式^[4]和级数形式^[5]2种。其中积分形式的计算精度高,远场和近场均适用,但计算效率低;级数形式计算效率高,但在近场附近很难收敛,同时在远方辐射半径 $R=0$ 处存在奇点。所以在计算有限水深格林函数及其导数时一般在近场采用积分形式,远场采用级数形式。

积分形式的解是主值积分且存在奇异性,这是有限水深格林函数及其导数求解的难点所在。传统的有限水深格林函数积分计算公式采用多点 Gauss-Laguerre 公式直接进行积分或多项式逼近。直接积分法一般需要取 64 个高斯积分点^[1]方能满足精度要求,但该方法耗时长且误差较大,尤其是在高频率处计算失真。多项式逼近法(例如法国船级社的 Hydrostar)需要计算大量的数据并选择适当的逼近区间,难以实施。本文拟通过推导和数值实验提出精确计算有限水深格林函数及其偏导数的方法,以解决高频失真问题。Newman^[6]认为在半径和水深比 $R/H>0.5$ 时采用适当项数的级数解可以得到理想的精度,但其并没有给出小 R/H 的简化解。为了提高计算效率,本文拟给出对称性的处理方法和简化的级数求解公式的实施方案,并编制计算程序将本文方法与商业软件计算结果进行比较分析,以验证本文方法的正确性和可行性。

1 浅水复杂格林函数法

1.1 入射势求解

设一阶波面升高表达式为

$$\zeta = A e^{iK(x \cos \beta + y \sin \beta) - i\omega t} \quad (1)$$

式中: A, K, ω 和 β 分别为波幅、波数、波浪自然频率和浪向,例如,顶浪为 180° 。坐标系定义: x 指向船艏, y 指向船左舷, z 垂直于静水面向上, xyz 符合右手法则。

那么,入射势 Φ_1 的一阶表达式为

$$\Phi_1 = \text{Re}[\phi_1 e^{-i\omega t}] = \text{Re} \left[\frac{Ag}{i\omega} \frac{\cosh K(z+H)}{\cosh KH} e^{iK(x \cos \beta + y \sin \beta) - i\omega t} \right] \quad (2)$$

式中: ϕ_1 为入射速度势的幅值; H 为水深; g 为重力加速度。

1.2 辐射势求解

无航速条件下,有限水深(均匀海底)的辐射势求解条件如下。

在流域内,

$$\nabla^2 \phi_j(x, y, z) = 0 \quad (3a)$$

在 $z=0$ 上,

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial z} - v \phi_j = 0 \quad (3b)$$

在物面不可穿透条件下,

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{n}} \right|_{S_0} = n_j \quad (3c)$$

在水底不可穿透条件下,

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right|_{z=-H} = 0 \quad (3d)$$

远方辐射条件下,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial R} - iK \phi_j \right) = 0 \quad (3e)$$

式中: $R = \sqrt{x^2 + y^2}$,为远方辐射半径; ϕ_j 为第 j 个自由度的速度势, $j=1, 2, 3, 4, 5, 6$; \mathbf{n} 为物面法向; n_j 为物面广义法向的第 j 个自由度分量; $v = \omega^2/g$; K 由公式 $K \tanh(KH) = v$ 求取; S_0 为浮体湿表面。

为了满足自由面边界条件、无穷远辐射条件和水底不可穿透条件,有限水深格林函数 G 一般采用如下2种形式。

1) 积分形式^[4]:

$$G(P(x, y, z), Q(\zeta, \eta, \zeta)) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_2} + P.V. \int_0^\infty \frac{2(k+v)e^{-kH} \cosh k(z+H) \cosh k(\zeta+H)}{k \sinh(kH) - v \cosh(kH)} J_0(kR) dk + i \frac{2\pi(K+v)e^{-KH} \sinh(KH) \cosh K(z+H) \cosh K(\zeta+H)}{vH + \sinh^2(KH)} J_0(KR) \quad (4)$$

式中: $P.V.$ 为取主值积分; $P(x, y, z)$ 和 $Q(\zeta, \eta, \zeta)$ 分别为场点和源点; $R = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}$; k 为积分变量; $r = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$; $r_2 = \sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2 + (z+2H+\zeta)^2}$; $\frac{1}{r_2}$ 项是 $\frac{1}{r}$ 关于池底的镜像; $J_0(\cdot)$ 为第1类零阶 Bessel 函数。

2) 级数形式^[5]:

$$G(P(x, y, z), Q(\zeta, \eta, \zeta)) = i2\pi \frac{K^2 - v^2}{H(K^2 - v^2) + v} \cosh K(z+H) \cosh K(\zeta+H) H_0^{(1)}(KR) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n^2 + v^2}{H(k_n^2 + v^2) - v} \cos k_n(z+H) \cos k_n(\zeta+H) K_0(k_n R) \quad (5)$$

式中: k_n 为方程 $k_n \tan k_n H + v = 0$ 的正实根; $H_0^{(1)}(\cdot)$ 为第1类零阶 Hankel 函数; $K_0(\cdot)$ 为第2类零阶修正的 Bessel 函数。

那么流域内各点的速度势为

$$\phi_j(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \sigma(Q) G(P, Q) dS \quad (6)$$

式中, $\sigma(Q)$ 为物面上的源强。

决定源强的积分表达式为

$$\frac{1}{2} \sigma(P) + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dS = \frac{\partial \phi_j(P)}{\partial n}, \quad P \in S_0 \text{物面} \quad (7)$$

式中, $\frac{\partial \phi_j}{\partial n} \Big|_{S_0} = n_j$, 由物面法向条件提供。由此, 可求得不同自由度 j 下的源强密度分布。边界和场内各点速度势的求解公式为

$$\phi_j = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \sigma(Q) G(P, Q) dS \quad (8)$$

那么, 附加质量 μ_{jk} 和附加阻尼 λ_{jk} 由下式求得:

$$\mu_{jk} + \frac{i\lambda_{jk}}{\omega} = \rho \iint_{S_0} \phi_k \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS \quad (9)$$

式中: ρ 为流体密度; ϕ_k 为辐射势。

1.3 绕射势求解

绕射势 ϕ_D 的求解方程为

在流域内,

$$\nabla^2 \phi_D(x, y, z) = 0 \quad (10a)$$

在 $z = 0$ 上,

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial z} - v \phi_D = 0 \quad (10b)$$

在物面上,

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial n} \Big|_{S_0} = - \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_{S_0} \quad (10c)$$

在水底,

$$G_0 = P.V. \int_0^\infty \frac{2(k+v)e^{-kH} \cosh k(z+H) \cosh k(\zeta+H)}{k \sinh(kH) - v \cosh(kH)} \cdot J_0(kR) dk =$$

$$P.V. \int_0^\infty e^{-kH} \left[1 + \frac{2v + (k+v)e^{-2kH}}{[k \tanh(kH) - v](1 + e^{-2kH})} \right] \cdot \left[e^{k(z+\zeta+H)} + e^{-k(-z+\zeta+H)} + e^{-k(z-\zeta+H)} + e^{-k(z+\zeta+3H)} \right] J_0(kR) dk \quad (14)$$

$$G_R = -P.V. \int_0^\infty e^{-kH} \left[k + k \frac{2v + (k+v)e^{-2kH}}{[k \tanh(kH) - v](1 + e^{-2kH})} \right] \cdot \left[e^{k(z+\zeta+H)} + e^{-k(-z+\zeta+H)} + e^{-k(z-\zeta+H)} + e^{-k(z+\zeta+3H)} \right] J_1(kR) dk \quad (15)$$

$$G_z = P.V. \int_0^\infty e^{-kH} \left[k + k \frac{2v + (k+v)e^{-2kH}}{[k \tanh(kH) - v](1 + e^{-2kH})} \right] \cdot \left[e^{k(z+\zeta+H)} + e^{-k(-z+\zeta+H)} - e^{-k(z-\zeta+H)} - e^{-k(z+\zeta+3H)} \right] J_0(kR) dk \quad (16)$$

式中, $J_1(\cdot)$ 为第1类一阶 Bessel 函数。

式(14)~式(16)中不带奇异性的积分通过借鉴下式得到:

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0 \quad (10d)$$

远方辐射条件下,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \phi_D}{\partial R} - iK \phi_D \right) = 0 \quad (10e)$$

物面上的入射势导数 $-\frac{\partial \phi_1}{\partial n} \Big|_{S_0}$ 可以通过式(2)

得到。绕射势与辐射势存在如下关系^[7]:

$$\iint_{S_0} \phi_D n_j dS = \iint_{S_0} \phi_D \frac{\partial \phi_j}{\partial n} dS = \iint_{S_0} \phi_j \frac{\partial \phi_D}{\partial n} dS = - \iint_{S_0} \phi_j \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS \quad (11)$$

得到绕射势的计算公式为

$$\phi_D = - \frac{\phi_j}{n_j} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \quad (12)$$

因此, 可以不必求解绕射势, 直接由波浪入射势 ϕ_1 和辐射势 ϕ_j 求得波浪力。辐射势在前面已求得, 第 j 阶波浪力(入射势+绕射势)的表达式为

$$f_{\text{wave},j} = \rho i \omega \iint_{S_0} (\phi_1 + \phi_D) n_j dS = \rho i \omega \iint_{S_0} \phi_1 \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \phi_1}{\partial n} dS = \rho i \omega \iint_{S_0} \phi_1 \{ n_j - k \phi_j [n_3 \tanh k(z+H) \cdot \cos \beta + n_2 \sin \beta] \} dS \quad (13)$$

2 浅水波浪载荷数值计算方法

在浅水辐射势和绕射势的求解过程中, 首先需要对格林函数及其导数进行求解。

2.1 格林函数的直接积分法

为了书写方便, 式(4)和式(5)中的格林函数 G 及其偏导数的主值积分部分 G_0 如下:

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \int_0^\infty x e^{-ax} J_0(bx) dx &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \int_0^\infty e^{-ax} J_1(bx) dx &= \frac{1}{b} \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \\ \int_0^\infty x e^{-ax} J_1(bx) dx &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned} \right. \quad (17)$$

式中, a 和 b 为广义变量。

因为式(14)~式(16)中含有 $e^{k(z+\zeta+H)}$, $e^{-k(z+\zeta+H)}$, $e^{-k(z-\zeta+H)}$ 和 $e^{-k(z+\zeta+3H)}$ 项, 直接进行 Gauss-Laguerre 积分会存在计算失真的问题, 因此需要进行特殊处理。下面以 G_0 的 $e^{k(z+\zeta+H)}$ 项为例进行说明, 其他项类似。其中, 表达式 G_{01} 为

$$G_{01} = P.V. \int_0^\infty e^{-kH} \frac{2v + (k+v)e^{-2kH}}{[k \tanh(kH) - v](1 + e^{-2kH})} e^{k(z+\zeta+H)} J_0(kR) dk \quad (18)$$

记 $S(k) = [k \tanh(kH) - v](1 + e^{-2kH})$, 其中令 $S(K) = 0$, 那么其导数为

$$S'(k) = \left\{ \tanh(kH) + kH [1 - \tanh^2(kH)] \right\} (1 + e^{-2kH}) - 2H [k \tanh(kH) - v] e^{-2kH} \quad (19)$$

为书写方便, 引入

$$T(k) = 2v + (k+v)e^{-2kH} \quad (20)$$

结合式(18)和式(19), 可以得到

$$G_{01} = \int_0^\infty e^{-kH} \left[\frac{T(k)}{S(k)} - \frac{T(K)}{(k-K)S'(K)} \right] e^{k(z+\zeta+H)} J_0(kR) dk + \frac{T(K)}{S'(K)} P.V. \int_0^\infty \frac{e^{k(z+\zeta)} J_0(kR)}{k-K} dk \quad (21)$$

其中第1项积分无奇异, 可以采用 Gauss-Laguerre 积分方法直接计算, 第2项积分可以通过无限水深的格林函数计算公式得到, 那么

$$G_{01} = \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{H} \left\{ \left[\frac{T(k_j)}{S(k_j)} - \frac{T(K)}{(k_j-K)S'(K)} \right] e^{k_j(z+\zeta+H)} J_0(k_j R) \right\} + \frac{T(K)}{S'(K)} G_{\text{inf}} \quad (22)$$

式中: w_j 为 Gauss-Laguerre 积分的权重系数;

$G_{\text{inf}} = P.V. \int_0^\infty \frac{e^{k(z+\zeta)} J_0(kR)}{k-K} dk$, 为无限水深格林函数的积分公式。

2.2 格林函数的级数解

根据前文所述, 浅水格林函数的求解公式可以采用如下级数解形式:

$$G(x, y, z, \zeta, \eta, \zeta) = i2\pi \frac{K^2 - v^2}{H(K^2 - v^2) + v} \cosh K(z+H) \cosh K(\zeta+H) H_0^{(1)}(KR) + 4 \sum_{n=1}^\infty \frac{k_n^2 + v^2}{H(k_n^2 + v^2) - v} \cos k_n(z+H) \cos k_n(\zeta+H) K_0(k_n R) \quad (23)$$

针对式(23)中的高阶级数项, 有

$$K_0(k_n R) = O(e^{-\pi n R/H}) \quad (24)$$

式(24)表明, 式(23)的收敛速度取决于 R/H , 当 $R/H=0$ 时, 式(23)将不收敛:

- 1) 当 $R/H \geq 0.50$ 时, 如果式(23)的 $n=10$, $K_0(k_n R) = O(10^{-7})$;
- 2) 当 $R/H \geq 0.25$ 时, 如果式(23)的 $n=20$, $K_0(k_n R) = O(10^{-7})$;
- 3) 当 $R/H \geq 0.10$ 时, 如果式(23)的 $n=50$, $K_0(k_n R) = O(10^{-7})$ 。

因此, 当 $R/H \geq 0.25$ 时, 可以选取适当项数的级数解来得到较为精确的值。Newman^[6]证明了当 $R/H \geq 0.5$ 时, 采用级数解可以得到精度较高的近似值, 级数项数一般取 $6H/R$ 的整数。另外, 当 $k_n R < 0.05$ 时, $K_0(k_n R) \approx \ln(k_n R)$; 当 $k_n R \geq 8.0$ 时, $K_0(k_n R) \approx e^{-k_n R}$ 。经过上述简化, 相比于直接积分, 可以较快速地计算出格林函数及其导数的值。

2.3 具有对称面的计算处理

对于具有对称面的物体, 在计算时可以节省大量的内存和时间。在求解源强时, 其系数矩阵为满秩矩阵, 只能使用计算效率较低的高斯消元法和 LU 分解法等, 其时间度为 $O(n^3)$, 所以利用矩阵的对称性求解线性方程组能够极大地提高求解速度。当物体具有 1 个对称面时, 方程可以转化为 2 个 $n/2$ 阶的线性方程组问题, 线性方程组的求解时间降为原来的 1/4; 当物体具有 2 个对称面时, 方程可以转化为 4 个 $n/4$ 阶的线性方程组问题, 线性方程组的求解时间降为原来的 1/16。下面, 以具有 2 个对称面的浮体计算源强时的推导过程为例, 具有 1 个对称面的情况与此类似。

为便于讨论, 将物面上的点分成 4 个区域(图 1)。

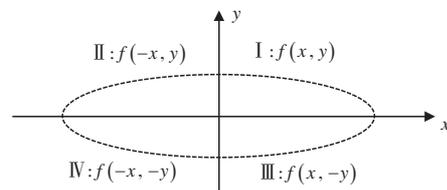


图1 浮体示意图

Fig.1 Schematic diagram of floating body

- 区域 I: $x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0$
- 区域 II: $x < 0, y \geq 0, z \leq 0$
- 区域 III: $x \geq 0, y < 0, z \leq 0$
- 区域 IV: $x < 0, y < 0, z \leq 0$

对于这类具有 2 个对称面(yz 和 xz 平面)的物体,存在如下关系式:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(-x, y), f(x, y) = f(x, -y), \\ f(x, y) &= f(-x, -y) \\ f_x(x, y) &= -f_x(-x, y), f_x(x, y) = f_x(x, -y), \\ f_x(x, y) &= -f_x(-x, -y) \\ f_y(x, y) &= f_y(-x, y), f_y(x, y) = -f_y(x, -y), \\ f_y(x, y) &= -f_y(-x, -y) \end{aligned} \quad (25)$$

若区域 I 中的坐标和法向量分别为 (r_x, r_y, r_z) 和 (N_x, N_y, N_z) , 则其他区域中与区域 I 对应的物面坐标和物面法向存在如下关系。

- 区域 I: $r_x, r_y, r_z, N_x, N_y, N_z$
- 区域 II: $-r_x, r_y, r_z, -N_x, N_y, N_z$
- 区域 III: $r_x, -r_y, r_z, N_x, -N_y, N_z$
- 区域 IV: $-r_x, -r_y, r_z, -N_x, -N_y, N_z$

此外, $(r_x, r_y, r_z) \times (N_x, N_y, N_z)$ 的关系式为

$$\begin{aligned} \text{区域 I:} & -r_z N_y + r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, -r_y N_x + r_x N_y \\ \text{区域 II:} & -r_z N_y + r_y N_z, -r_z N_x + r_x N_z, r_y N_x - r_x N_y \\ \text{区域 III:} & r_z N_y - r_y N_z, r_z N_x - r_x N_z, r_y N_x - r_x N_y \\ \text{区域 IV:} & r_z N_y - r_y N_z, -r_z N_x + r_x N_z, -r_y N_x + r_x N_y \end{aligned} \quad (28)$$

则 $G_{0,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} G_0 ds$ 的速度势矩阵为

$$G_0 = \begin{pmatrix} I_\phi & II_\phi & III_\phi & IV_\phi \\ II_\phi & I_\phi & IV_\phi & III_\phi \\ III_\phi & IV_\phi & I_\phi & II_\phi \\ IV_\phi & III_\phi & II_\phi & I_\phi \end{pmatrix} \quad (29)$$

式中: i 和 j 分别为场点和源点的元面序号;角标 ϕ 为速度势。

$$G_{0x,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dx} ds \text{ 的速度势矩阵为}$$

$$G_{0x} = \begin{pmatrix} I_x & II_x & III_x & IV_x \\ -II_x & -I_x & -IV_x & -III_x \\ III_x & IV_x & I_x & II_x \\ -IV_x & -III_x & -II_x & -I_x \end{pmatrix} \quad (30)$$

$G_{0y,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dy} ds$ 的速度势矩阵为

$$G_{0y} = \begin{pmatrix} I_y & II_y & III_y & IV_y \\ II_x & I_x & IV_x & III_y \\ -III_y & -IV_y & -I_y & -II_y \\ -IV_y & -III_y & -II_y & -I_y \end{pmatrix} \quad (31)$$

$G_{0z,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dz} ds$ 的速度势矩阵为

$$G_{0z} = \begin{pmatrix} I_z & II_z & III_z & IV_z \\ II_z & I_z & IV_z & III_z \\ III_z & IV_z & I_z & II_z \\ IV_z & III_z & II_z & I_z \end{pmatrix} \quad (32)$$

$G_{0n,ij} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_j} \frac{dG_0}{dn} ds$ 的法向诱导速度势矩阵为

$$G_{0n} = \begin{pmatrix} I_n & II_n & III_n & IV_n \\ II_n & I_n & IV_n & III_n \\ III_n & IV_n & I_n & II_n \\ IV_n & III_n & II_n & I_n \end{pmatrix} \quad (33)$$

设在区域 I 上有 N 个单元,那么整个物面的平均湿表面上共有 $4N$ 个单元。从式(29)~式(33)可以看出,并不需要计算整个物面的速度势矩阵 $G_0, G_{0x}, G_{0y}, G_{0z}$ 和 G_{0n} , 只需对每个矩阵计算 4 个 $N \times N$ 矩阵。对于具有 2 个对称面(yz 和 xz 平面)的湿表面来说,可采用式(33)求解源强的系数矩阵。该矩阵为循环矩阵,可将原方程组的求解化为 4 个 N 阶矩阵的方程组来求解^[8], 下面介绍具体的计算方法。

源强 $\{\sigma_j\}$ 的线性求解方程组为

$$G_{0n} \{\sigma_j\} = \{n_i\} \quad (34)$$

式中, $\{n_i\}$ 为第 i 个面元的法向。

定义 $4N$ 阶矩阵 P_{4N} 和 P_{2N} 为

$$\begin{aligned} P_{4N} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} E_{2N} & E_{2N} \\ -E_{2N} & E_{2N} \end{pmatrix} \\ P_{2N} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} E_N & E_N \\ -E_N & E_N \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

式中, E_{2N} 和 E_N 分别为 $2N$ 阶和 N 阶单位矩阵。 P_{4N} 可将 G_{0n} 对角化, 即

$$P_{4N}^T G_{0n} P_{4N} = \begin{pmatrix} I_n - III_n & II_n - IV_n & 0 & 0 \\ II_n - IV_n & I_n - III_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n + III_n & II_n + IV_n \\ 0 & 0 & II_n + IV_n & I_n + III_n \end{pmatrix} \quad (36)$$

P_{2N} 可将式(36)对角化为

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{P}_{4N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} = \\ & \left(\begin{matrix} I_n - II_n - III_n + IV_n & & & \\ & I_n + II_n - III_n - IV_n & & \\ & & I_n - II_n + III_n - IV_n & \\ & & & I_n + II_n + III_n + IV_n \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (37)$$

源强的线性求解方程组变换为

$$\left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \mathbf{G}_{0n} \mathbf{P}_{4N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{n_i\} \quad (38)$$

将式(37)代入式(38),可得

$$\left(\begin{matrix} I_n - II_n - III_n + IV_n & & & \\ & I_n + II_n - III_n - IV_n & & \\ & & I_n - II_n + III_n - IV_n & \\ & & & I_n + II_n + III_n + IV_n \end{matrix} \right) \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{n_i\} \quad (39)$$

引入新变量 $\{\bar{\sigma}_j\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\}$, $\{\bar{n}_i\} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N}^T \\ \mathbf{P}_{2N}^T \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{n_i\}$, 则式(39)可以转换为

$$\left(\begin{matrix} I_n - II_n - III_n + IV_n & & & \\ & I_n + II_n - III_n - IV_n & & \\ & & I_n - II_n + III_n - IV_n & \\ & & & I_n + II_n + III_n + IV_n \end{matrix} \right) \{\bar{\sigma}_j\} = \{\bar{n}_i\} \quad (40)$$

$\{\bar{\sigma}_j\}$ 可以由如下线性方程组求解:

$$\begin{cases} (I_n - II_n - III_n + IV_n) \{\bar{\sigma}_j\}_{j=1-N} = \{\bar{n}_i\}_{i=1-N} \\ (I_n + II_n - III_n - IV_n) \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(N+1)-2N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(N+1)-2N} \\ (I_n - II_n + III_n - IV_n) \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(2N+1)-3N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(2N+1)-3N} \\ (I_n + II_n + III_n + IV_n) \{\bar{\sigma}_j\}_{j=(3N+1)-4N} = \{\bar{n}_i\}_{i=(3N+1)-4N} \end{cases} \quad (41)$$

然后, 利用 $\{\sigma_j\} = \mathbf{P}_{4N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} \{\bar{\sigma}_j\}$ 求取源

强。另外, 还可将公式 $\left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} \mathbf{P}_{4N}^T \{\sigma_j\} = \{\bar{\sigma}_j\}$ 中 \mathbf{P}^T 的系数 $\sqrt{2}/2$ 移到 $\{\sigma_j\} = \mathbf{P}_{4N} \left\{ \begin{matrix} \mathbf{P}_{2N} \\ \mathbf{P}_{2N} \end{matrix} \right\} \{\bar{\sigma}_j\}$ 的 \mathbf{P} 中, 这样, 源强的求解公式便可变换为

$$\begin{cases} (I_n - II_n - III_n + IV_n) \{\tilde{\sigma}_j\}_{j=1-N} = \{\{n_i\}_{i=1-N} - \{n_i\}_{i=(N+1)-2N} - \{n_i\}_{i=(2N+1)-3N} + \{n_i\}_{i=(3N+1)-4N}\} \\ (I_n + II_n - III_n - IV_n) \{\tilde{\sigma}_j\}_{j=(N+1)-2N} = \{\{n_i\}_{i=1-N} + \{n_i\}_{i=(N+1)-2N} - \{n_i\}_{i=(2N+1)-3N} - \{n_i\}_{i=(3N+1)-4N}\} \\ (I_n - II_n + III_n - IV_n) \{\tilde{\sigma}_j\}_{j=(2N+1)-3N} = \{\{n_i\}_{i=1-N} - \{n_i\}_{i=(N+1)-2N} + \{n_i\}_{i=(2N+1)-3N} - \{n_i\}_{i=(3N+1)-4N}\} \\ (I_n + II_n + III_n + IV_n) \{\tilde{\sigma}_j\}_{j=(3N+1)-4N} = \{\{n_i\}_{i=1-N} + \{n_i\}_{i=(N+1)-2N} + \{n_i\}_{i=(2N+1)-3N} + \{n_i\}_{i=(3N+1)-4N}\} \end{cases} \quad (42)$$

式中, $\{\tilde{\sigma}_j\}$ 为临时中间变量。源强为

$$\{\sigma_j\} = \frac{1}{4} \left\{ \begin{matrix} \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=1-N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(N+1)-2N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(2N+1)-3N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(3N+1)-4N} \\ -\{\tilde{\sigma}_j\}_{i=1-N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(N+1)-2N} - \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(2N+1)-3N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(3N+1)-4N} \\ -\{\tilde{\sigma}_j\}_{i=1-N} - \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(N+1)-2N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(2N+1)-3N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(3N+1)-4N} \\ \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=1-N} - \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(N+1)-2N} - \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(2N+1)-3N} + \{\tilde{\sigma}_j\}_{i=(3N+1)-4N} \end{matrix} \right\} \quad (43)$$

3 波浪载荷计算方法

3.1 浮体表面的波动压力

应用面元法分别求解得到辐射势 ϕ_j ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6$)之后,便可通过规则波中的浮体运动方程获得稳态的运动响应 η_j ($j=1, 2, 3, 4, 5, 6$),那么非定常辐射势 ϕ_R 和绕射势 ϕ_D 便随之确定。浮体表面的波动压力除了由波浪入射势、辐射势和绕射势引起的脉动压力,还将包含由浮体运动引起的浮体表面静水压力变化 p_s 项,总的脉动压力为^[9]

$$p(x, y, z) = p_s(x, y, z) + \rho i \omega [\phi_1(x, y, z) + \phi_D(x, y, z) + \phi_R(x, y, z)] = p_s(x, y, z) + \rho i \omega [\phi_1(x, y, z) + \phi_D(x, y, z) - \sum_{j=1}^6 i \omega x_j \phi_j(x, y, z)] \quad (44)$$

$$p_s(x, y, z) = -\rho g (\eta_3 + y \eta_4 - x \eta_5) \quad (45)$$

式中, η_3 , η_4 和 η_5 分别为浮体的垂荡、横摇和纵摇运动。

3.2 浮体横剖面的波浪载荷

确定了规则波中的浮体运动响应之后,便可应用达朗贝尔原理计算浮体横剖面的力和力矩,包括波浪诱导的垂向弯矩与水平的剪力和弯矩以及轴力和扭矩。

3.2.1 部分长度浮体的刚体惯性力载荷

以浮体 x 轴与横剖面的交点为坐标原点 O ,选取单位长度的浮体,设其质量为 $\mu(x)$,质心坐标为 (x, y, z) ,其惯性质量矩阵为

$$m = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 & S_z & -S_y \\ 0 & \mu & 0 & -S_z & 0 & S_x \\ 0 & 0 & \mu & S_y & -S_x & 0 \\ 0 & -S_z & S_y & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ S_z & 0 & -S_x & -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -S_y & S_x & 0 & -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (46)$$

式中: I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} , I_{xy} , I_{xz} 和 I_{yz} 为关于坐标 x , y , z 的惯性矩(积); $S_x \equiv \mu x$, $S_y \equiv \mu y$, $S_z \equiv \mu z$,均为刚体质量关于坐标平面的静矩。

任意横剖面 x 处至船艏 x_f 之间的质量对横剖面的刚体惯性力载荷为

$$\{f_1\} = - \int_x^{x_f} m dx \{\ddot{\eta}\} \quad (47)$$

式中, $\{\ddot{\eta}\}$ 为浮体六自由度运动加速度。

3.2.2 浮体横剖面的力和力矩

作用于任意横剖面 x 处至船艏 x_f 之间部分长度浮体上的真实流体载荷与横剖面上的力相互

平衡,那么横剖面上的载荷为

$$\{Q\} = \iint_{S_x} p \cdot n dS + \omega^2 \int_x^{x_f} m dx \cdot \eta + \{0, 0, 0, (z_g - z_b) \eta_4 M, (z_g - z_b) \eta_5 M, 0\} \quad (48)$$

式中: S_x , M , z_b 和 z_g 分别为横剖面 x 处至船艏 x_f 之间部分长度浮体的湿表面、质量、浮心和重心的 z 坐标; p 为流体压力; η 为浮体六自由度运动幅值。

4 浅水数值计算结果对比分析

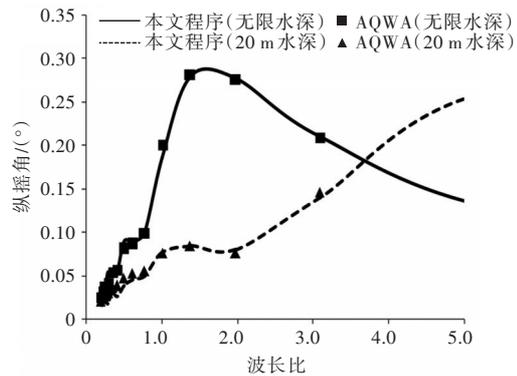
4.1 箱型浮体计算结果

针对 ISSC(2006)^[10]标准浮箱进行了运动传递函数的计算,其主尺度和计算结果如表1和图2所示。

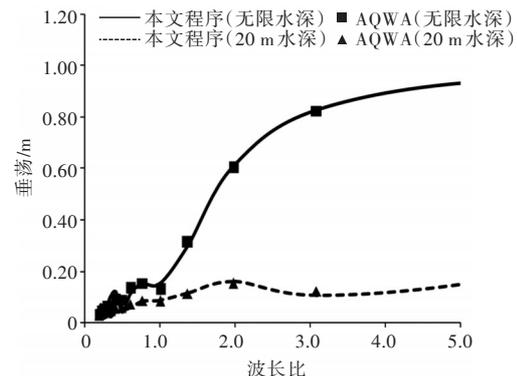
本次计算的1/4模型网格数为155个。从图2可以看出,针对无限水深和20 m水深,本程序计算结果与采用商业软件AQWA获得的计算结果十分吻合,验证了本文计算方法的正确性。

表1 浮箱主尺度
Table 1 Main dimensions of box

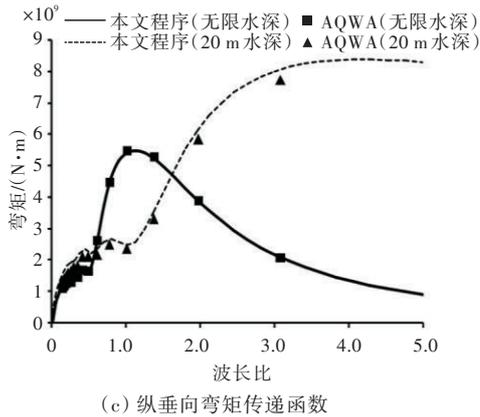
参数	数值	参数	数值
垂线间长 L_{BP}/m	500	排水量/t	5.125×10^4
水线宽/m	100	绕 x 轴惯性矩 I_x/m^4	4.37×10^{10}
型深/m	2	绕 y 轴惯性矩 I_y/m^4	1.072×10^{12}
平均吃水深度/m	1	绕 z 轴惯性矩 I_z/m^4	1.115×10^{12}



(a) 纵摇传递函数



(b) 垂荡传递函数



(c) 纵垂向弯矩传递函数
图2 箱型浮体运动和载荷传递函数(0°浪向)
Fig.2 Transfer function of motion and loads of box (0° wave direction)

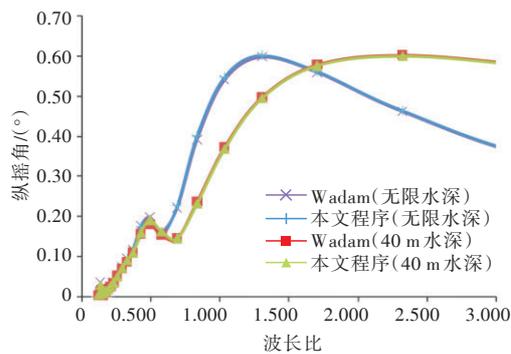
4.2 大型散货船计算结果

针对一艘 20.5×10^4 t 大型散货船, 计算了零航速(压载)工况下纵摇和垂荡传递函数, 其主尺度和计算结果如表2和图3所示。

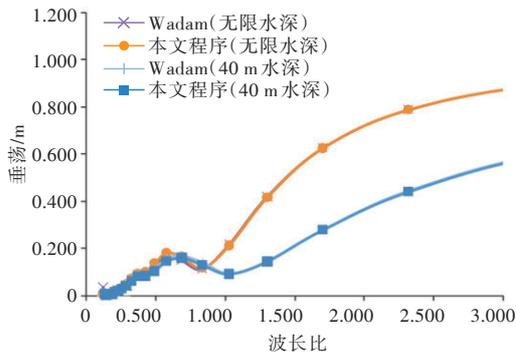
本次计算的半模型网格数为440个。从图3可以看出, 针对无限水深和40 m水深, 本文程序

表2 散货船主尺度
Table 2 Main dimensions of bulk carrier

参数	数值	参数	数值
垂线间长 L_{BP} /m	295	排水量/t	85 422.6
水线宽/m	50	方型系数	0.845
型深/m	24.7	纵向惯性矩半径/m	$0.253L_{BP}$
平均吃水深度/m	7.1		



(a) 纵摇传递函数(顶浪)



(b) 垂荡传递函数(顶浪, 重心处)

图3 散货船运动传递函数
Fig.3 Transfer function of motion of bulk carrier

计算结果与采用商业软件 Wadam 获得的计算结果十分吻合, 验证了本文计算程序和方法的正确性。

5 结语

基于势流理论和边界元方法, 给出了速度势求解方程, 同时利用循环矩阵原理对复杂格林函数进行了严谨的求解推导和对称性处理研究, 从而建立了浮体在浅水中运动和波浪载荷的完整计算方法。本文给出的改进方法和思路可以精确计算格林函数及其导数, 同时通过研究有限水深格林函数的级数解形式, 给出了简化的快速计算方法。针对具有对称面的浮体, 引入循环矩阵进行严格数学推导, 发现利用对称性得到简化后的辐射势求解方法可节省大量计算时间。

通过自主开发程序进行数值计算, 并与成熟商业软件结果进行对比分析, 验证了本文给出的有限水深格林函数计算方法和相应计算程序的正确性。本文建立的计算方法对浅水中的浮体运动和波浪载荷评估具有重要意义。

参考文献:

- [1] Li L. Numerical seakeeping predictions of shallow water effect on two ship interactions in waves[D]. Halifax, Nova Scotia: Dalhousie University, 2001.
- [2] 谢永和, 李润培, 舒志. 有限水深复合格林函数的数值计算[J]. 船舶力学, 2005, 9(1): 23-28. Xie Y H, Li R P, Shu Z. Numerical calculation of finite water-depth composite Green function[J]. Journal of Ship Mechanics, 2005, 9(1): 23-28 (in Chinese).
- [3] 刘日明, 任慧龙, 李辉. 有限水深格林函数及其导数的改进 Gauss-Laguerre 算法[J]. 船舶力学, 2008, 12(2): 188-196. Liu R M, Ren H L, Li H. An improved Gauss-Laguerre method for finite water depth Green function and its derivatives[J]. Journal of Ship Mechanics, 2008, 12(2): 188-196 (in Chinese).
- [4] Wehausen J V, Laitone E V. Surface waves, handbuch der physik[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1960: 446-778.
- [5] John F. On the motion of floating bodies II: simple harmonic motions[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1950, 3(1): 45-101.
- [6] Newman J N. Algorithms for the free-surface green function[J]. Journal of Engineering Mathematics, 1985, 19(1): 57-67.
- [7] Newman J N. The exciting forces on a moving body in waves[J]. Journal of Ship Research, 1965, 9(3): 190-199.
- [8] 卢诚波. 几类循环矩阵的快速算法研究[D]. 上海: 上海大学, 2011: 17. Lu C B. Fast algorithm for several circulant matrix[D]. Shanghai: Shanghai University, 2011: 17 (in Chinese).
- [9] 戴仰山, 沈进威, 宋竞正. 船舶波浪载荷[M]. 北京: 国防工业出版社, 2007: 27-31. Dai Y S, Shen J W, Song J Z. Ship wave load[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2007: 27-31.
- [10] ISSC. Very large floating structures[C]// 16th International Ship and Offshore Structures Congress. Southampton, UK: ISSC, 2006.